Закон повторного логарифма для линейных процессов, порожденных $m-$ зависимой последовательностью случайных величин

Т.М.Зупаров

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}-$ последовательность случайных величин (с.в.). Будем предполагать, что величины ξ_i имеют нулевые средние и конечные дисперсии. Пусть далее $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}-$ последовательность чисел такая, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}^2 < \infty .$$

Последовательность с.в. $\{X_{kN}, 1 \leq k \leq N, N \geq 1\}$ называется линейным процессом, имеющим коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$ и порожденными случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$, если ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$ сходится с вероятностью 1 и $X_k = X_{kN} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$, $k = 1,2,...$

Широкое развитие теории случайных процессов, математической статистики, а также применение вероятностных методов в экономике и в биологии вызывают необходимость изучения предельного поведения линейных процессов, порожденных последовательностью независимых или слабо зависимых случайных величин. Как стационарные решения стохастических разностных уравнений, такие процессы служат математической моделью накапливающихся ошибок при последовательных уточнениях экспериментальных данных. Кроме того, линейные процессы адекватно описывают некоторые временные изменения в естественных и технических науках и в экономике.

Пусть $\{\xi_k, k \in Z\}-$стационарная, в узком смысле последовательность случайных величин. Через M_a^b мы обозначим $\sigma-$алгебру событий, порожденную случайными величинами $\xi_a, \xi_{a+1}, ..., \xi_b$. Мы скажем, что последовательность $\{\xi_k, k \in Z\}$удовлетворяет условию $m-$зависимости если любые два вектора вида $\left(\xi_{a-p}, \xi_{a-p+1}, ..., \xi_a\right)$ и $\left(\xi_b, \xi_{b+1}, ..., \xi_{b+q}\right)$ независимы при $b - a > m$.

Положим $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k, B_N^2 = DS_N$,

Работа P.C.B.Phillips и V.Solo [3] посвящена асимптотическому анализу распределения суммы линейных процессов. В этой работе, авторы, используя представления линейного процесса X_k в виде

$$X_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\xi_k + \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a}_j \xi_{k-1-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a}_j \xi_{k-j} \text{ , где } \overline{a}_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i ,$$

доказали различные варианты усиленного закона больших чисел, закона повторного логарифма (ЗПЛ), центральной предельной теоремы и принципа инвариантности . Обзор предельных теорем для линейных процессов можно найти в работе [1].

Теорема 3 (ЗПЛ). Пусть выполнены условия:

1) $\{\xi_i, i \in Z\}$ – является последовательностью независимых и одинаково распределенных с.в. со среднем 0 и $M|\xi_0|^s < \infty$, для некоторого s, удовлетворяющего условию $2 < s \le 3$,

2) Коэффициенты линейного процесса не зависят от N, $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i^2 < \infty$ и $a_{iN} = a_i = 0, i < 0$,

или

3) Коэффициенты линейного процесса не зависят от N, $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{i}|a_i| < \infty$ и $a_{iN} = a_i = 0, i < 0$.

Тогда

$$\limsup_{N\to\infty}, \liminf_{N\to\infty} \left[\frac{S_N}{\sigma_X \sqrt{2N \ln \ln N}} \right] = \pm 1 \text{ п.н., где } \sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right)^2 .$$

Здесь следует отметить, что из условия 2), в общем случае, не следует условие 3). Lai и Wei (см.[2]) получили закон повторного логарифма при условии $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i^2 < \infty$, которое следует из 2), без предположения об одинаковой распределенности случайных величин ξ_k. В работе [4] получено обобщение результатов Lai и Wei(a) и применение его к анализу временных рядов и регрессии.

В данной работе получено обобщение теоремы 3 для линейных процессов, порожденных $m-$ зависимой последовательностью случайных величин.

Литература

1. Т.М.Зупаров. Предельные теоремы для линейных процессов, Материалы респуб. Научно-практической конференции «Статистика и ее применения», Ташкент, 2012, сю 112 -123.

2. . T.L.Lai, C.Z.Wei. A law of the iterated logarithm for double arrays of independent random variables with applications to regression and time series models, Ann.Probab. 10, 1982, p.320-335.

3. P.C.B.Phillips, V.Solo. Asymptotics for linear processes, Ann. Statist., v.20, N2, 1992, p.971 – 1001.

4. . Zhao-Guo Chen. An extension of Lai and Wei's law of the iterated logarithm with applications to time series analysis and regression, J.Multivariate analysis., 32, 1990, p.55- 69.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro`yxati

1.Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. О сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных слабо зависимыми случайными величинами. Сб. Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь Пермски й Госуниверситет.-2011.-вып 23.

2.Т.М.Зупаров. Предельные теоремы для линейных процессов, Материалы респуб. Научно-практической конференции «Статистика и ее применения», Ташкент, 2012, сю 112 -123.

3. И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник. Независимые и стационарно связанные величины, М.,:Наука, 1965, 524 с.

4. T.L.Lai, C.Z.Wei. A law of the iterated logarithm for double arrays of independent random variables with applications to regression and time series models, Ann.Probab. 10, 1982, p.320-335.

5. P.C.B.Phillips, V.Solo. Asymptotics for linear processes, Ann. Statist., v.20, N2, 1992, p.971 – 1001.

6. С.А.Утев. О законе повторного логарифма для $\varphi-$ перемешанных случайных величин, Сибирс. Матем. журнал., т. 25, 1984, №1, с.174-179.

7. С.А.Утев. Об одном способе исследования сумм слабозависимых случайных величин, Сибирс. Матем. журнал., т. 32, 1991, №4, с.165-173.

8. С.А.Утев. Суммы случайных величин с $\varphi-$перемешиванием. Тр. Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т.13, с. 76 – 100.

9. Zhao-Guo Chen. An extension of Lai and Wei’s law of the iterated logarithm with applications to time series analysis and regression, J.Multivariate analysis., 32, 1990, p.55- 69.

10. O. Safarov Chiziqli jarayonlarning asimptotik holatlari. Magistirlik ditsertasiyasi. Toshkent, O`zMY, 2014.

Закон повторного логарифма для линейных процессов, порожденных независимой последовательностью случайных величин

Т.М.Зупаров

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}-$ последовательность случайных величин (с.в.). Будем предполагать, что величины ξ_i имеют нулевые средние и конечные дисперсии. Пусть далее $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}-$ последовательность чисел такая, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}^2 < \infty .$$

Последовательность с.в. $\{X_{kN}, 1 \leq k \leq N, N \geq 1\}$ называется линейным процессом, имеющим коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$ и порожденными случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$, если ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$ сходится с вероятностью 1 и $X_k = X_{kN} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$, $k = 1,2,...$

Широкое развитие теории случайных процессов, математической статистики, а также применение вероятностных методов в экономике и в биологии вызывают необходимость изучения предельного поведения линейных процессов, порожденных последовательностью независимых или слабо зависимых случайных величин. Как стационарные решения стохастических разностных уравнений, такие процессы служат математической моделью накапливающихся ошибок при последовательных уточнениях экспериментальных данных. Кроме того, линейные процессы адекватно описывают некоторые временные изменения в естественных и технических науках и в экономике.

Пусть $\{\xi_k, k \in Z\}-$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k, B_N^2 = DS_N$,

Работа P.C.B.Phillips и V.Solo [3] посвящена асимптотическому анализу распределения суммы линейных процессов. В этой работе, авторы, используя представления линейного процесса X_k в виде

$$X_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi_k + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \xi_{k-1-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \xi_{k-j} \text{, где } \bar{a}_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i ,$$

доказали различные варианты усиленного закона больших чисел, закона повторного логарифма (ЗПЛ), центральной предельной теоремы и принципа инвариантности . Обзор предельных теорем для линейных процессов можно найти в работе [1].

Теорема 1 (ЗПЛ). Пусть выполнены условия:

1) $\{\xi_i, i \in Z\}$ – является последовательностью независимых и одинаково распределенных с.в. со среднем 0 и $M|\xi_0|^s < \infty$, для некоторого s, удовлетворяющего условию $2 < s \le 3$,

2) Коэффициенты линейного процесса не зависят от N, $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i^2 < \infty$ и $a_{iN} = a_i = 0, i < 0$,

или

3) Коэффициенты линейного процесса не зависят от N, $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{i}|a_i| < \infty$ и $a_{iN} = a_i = 0, i < 0$.

Тогда

$$\limsup_{N\to\infty}, \liminf_{N\to\infty} \left[\frac{S_N}{\sigma_X \sqrt{2N \ln\ln N}} \right] = \pm 1 \text{ п.н., где } \sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right)^2.$$

Здесь следует отметить, что из условия 2), в общем случае, не следует условие 3). Lai и Wei (см.[2]) получили закон повторного логарифма при условии $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i^2 < \infty$, которое следует из 2), без предположения об одинаковой распределенности случайных величин ξ_k. В работе [4] получено обобщение результатов Lai и Wei(a) и применение его к анализу временных рядов и регрессии.

В данной работе получено обобщение теоремы 1,в случае, когда S_N заменяется через $f(X_1) + ... + f(X_n)$, где $f(\cdot)$ – квадратическая функция.

Литература

1. Т.М.Зупаров. Предельные теоремы для линейных процессов, Материалы респуб. Научно-практической конференции «Статистика и ее применения», Ташкент, 2012, сю 112 -123.

2. . T.L.Lai, C.Z.Wei. A law of the iterated logarithm for double arrays of independent random variables with applications to regression and time series models, Ann.Probab. 10, 1982, p.320-335.

3. P.C.B.Phillips, V.Solo. Asymptotics for linear processes, Ann. Statist., v.20, N2, 1992, p.971 – 1001.

4. . Zhao-Guo Chen. An extension of Lai and Wei’s law of the iterated logarithm with applications to time series analysis and regression, J.Multivariate analysis., 32, 1990, p.55- 69.