О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных слабо зависимыми случайными величинами

Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность случайных величин (с.в.). Будем предполагать, что величины ξ_i имеют нулевые средние и конечные дисперсии. Пусть далее $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}-$ последовательность чисел такая, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}^2 < \infty .$$

Последовательность с.в. $\{X_{kN}, 1 \leq k \leq N, N \geq 1\}$ называется линейным процессом, имеющим коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$ и порожденными случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$, если ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$ сходится с вероятностью 1 и $X_k = X_{kN} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$.

Широкое развитие теории случайных процессов, математической статистики, а также применение вероятностных методов в экономике и в биологии вызывают необходимость изучения предельного поведения линейных процессов порожденных независимых или слабо зависимых случайных величин (с.в) . Как стационарные решения стохастических разностных уравнений, такие процессы служат математической моделью накапливающихся ошибок при последовательных уточнениях экспериментальных данных. Кроме того, линейные процессы адекватно описывают некоторые временные изменения в естественных и технических науках и в экономике.

Положим $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k, B_N^2 = DS_N, F_N(x) = P(S_N < xB_N), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$,

$$\Delta_x(F_N, \Phi) = |F_N(x) - \Phi(x)|, \Delta(F_N, \Phi) = \sup_x \Delta_x(F_N, \Phi) ,$$

$$b_{kN} = a_{1-k,N} + a_{2-k,N} + \ldots + a_{N-k,N} .$$

Асимптотическая нормальность S_N / B_N и оценки скорости сходимости к нулю величин $\Delta_x(F_N, \Phi)$ и $\Delta(F_N, \Phi)$ когда $\{\xi_i, i \in Z\}-$ независимая последовательность с.в., изучена достаточно подробно (см. например [1]). В случае, когда $\{\xi_i, i \in Z\}-$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве R^k – оценка порядка $O(N^{-1/2})$ в ц.п.т. для линейных процессов, получена в работе [2]. Принцип инвариантности и оценка сходимости в принципе инвариантности изучена в [3].

Пусть $\{Y_{kN}, k \in Z, N \geq 1\}-$ последовательность случайных величин. Через M_a^b мы обозначим $\sigma-$алгебру событий, порожденную случайными величинами $Y_{aN}, Y_{a+1,N}, ..., Y_{bN}$. В работе мы используем следующие условия слабой зависимости:

а) условию полной регулярности (п.р.): при $n \to \infty$

$$\rho(n) = \sup \frac{|E\xi\eta - E\xi E\eta|}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}} \to 0,$$

где верхняя грань берется по всем случайным величинам ξ, η, измеримым относительно $\sigma-$алгебр $M_{-\infty}^k, M_{k+n}^\infty$ соответственно и имеющим конечный второй момент.

б) условию равномерного сильного перемешивания (р.с.п.): при $n \to \infty$

$$\varphi(n) = \sup \left| \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{P(A)} \right| \to 0,$$

где верхняя грань берется по всем $A \in M_{-\infty}^k, B \in M_{k+n}^\infty$.

в) условию $m-$зависимости: любые два вектора вида $(Y_{a-p,N}, Y_{a-p+1,N}, ..., Y_{a,N})$ и $(Y_{bN}, Y_{b+1,N}, ..., Y_{b+q,N})$ независимы при $b - a > m$.

В настоящей работе получена оценка дисперсии сумм линейного процесса и исследована скорость, с которой $\Delta(F_n, \Phi)$ стремится к нулю, когда N стремится к бесконечности, в зависимости от ограничений, налагаемых на $\varphi(n), \rho(n), a_{kN} -$ коэффициенты линейного процесса и моменты случайных величин ξ_j.

В следующей теореме получена равномерная оценка остаточного члена в ц.п.т. для линейных процессов, порожденных строго стационарной последовательностью удовлетворяющих условию р.с.п.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию р.с.п. с коэффициентом перемешивания

$$\varphi(n) \leq Ke^{-\lambda n}, 0 < K, \lambda < \infty$$

$E\xi_0 = 0, E\xi_1^2 = 1$ и $\rho_s = E|\xi_0|^s < \infty, 2 < s \leq 3$. Пусть далее $\{X_{kN}, 1 \leq k \leq N, N \geq 1\}-$ линейный процесс имеющие коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$ и порожденный последовательностью $\{\xi_i, i \in Z\}$. Тогда существует постоянная $C = C(s, K, \lambda)$ зависящая только от s, K и λ такая, что

$$\Delta(F_N, \Phi) \leq C \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_{kN}|^s \rho_s}{B_N^s} \ln^{s-1}(N+1).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того, если выполнены следующие условия:

$$\sigma^2 = E\xi_1^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_1\xi_{1+k} < \infty; \qquad (1)$$

$$a(N) = a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN} < \infty, a \neq 0; \qquad (2)$$

$$b = |a_{0N}| + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |a_{kN}| < \infty . \qquad (3)$$

и $\sigma > 0$, то

$$\Delta(F_N, \Phi) \le C_1(s, K, \lambda) \left(\frac{b\rho_s^{1/s}}{|a| \min\left\{\sigma, \sigma^{(s-2)/s}\right\}} \right)^s \frac{\ln^{s-1}(N+2)}{N^{(s-2)/2}},$$

где $C_1(s, K, \lambda)$ – постоянная зависящая только от s, K и λ.

В теоремах 3 и 4 получены равномерные оценки остаточного члена в ц.п.т. для линейных процессов, порожденных строго стационарной $m-$ зависимой последовательностью.

Теорема 3. Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}$ – стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию $m-$ зависимости, $E\xi_0 = 0, E\xi_1^2 = 1$ и $\rho_s = E|\xi_0|^s < \infty, 2 < s \le 3$. Пусть далее $\{X_{kN}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ – линейный процесс имеющие коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \ge 1\}$ и порожденный последовательностью $\{\xi_i, i \in Z\}$. Тогда существует постоянная $C(s)$, зависящая только от s такая, что

$$\Delta(F_N, \Phi) \le C(s)(m+1)^{s-1} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_{kN}|^s}{B_N^s} \rho_s .$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Кроме того, если выполнены условия (2), (3) и

$$0 < \sigma^2 = E\xi_0^2 + 2\sum_{k=1}^{m} E\xi_0\xi_k ,$$

то

$$\Delta(F_N, \Phi) \le C(s)(m+1)^{s-1} \left(\frac{b}{|a|\sigma} \right)^s \frac{\rho_s}{N^{(s-2)/2}} .$$

Доказательства вышеперечисленных теорем приведены в п.4.

П.2. Некоторые вспомогательные результаты

В этом пункте приводится леммы, необходимые для доказательства основных теорем.

Следующий аналог неравенства Розенталя для $m-$ зависимых последовательностей с.в. принадлежит Т.М.Зупарову (см. [4]).

Лемма 1. Пусть $Y_1, Y_2, ...$ – $m-$ зависимая последовательность с.в., $EY_j = 0, E|Y_j|^t < \infty$ для $j = 1, 2, ...$ Тогда существует такое положительное постоянное $C(t)$, зависящее только от $t \ge 2$, что

$$E\left| \sum_{j=1}^{N} Y_j \right|^t \le C(t)(m+1)^{t-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N} E|Y_j|^t + \left(\sum_{j=1}^{N} EY_j^2 \right)^{t/2} \right\},$$

где $N \ge 1$ произвольное натуральное число.

В следующей лемме, доказанной в работе [5] В.В.Шергином получена оценка в центральной предельной теореме для последовательности $m-$зависимых с.в.

Лемма 2. Пусть $Y_1, Y_2, ... - m-$зависимая последовательность с.в. с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Если для некоторого $2 < s \le 3$ $E|Y_j|^s < \infty,\ j = 1,2,...$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| P(Z_N < xB_N) - \Phi(x) \right| \le C(s)(m+1)^{s-1}\Lambda_s,$$

где $Z_N = \sum_{j=1}^{N} Y_j,\ B_N^2 = EZ_N^2$ и $\Lambda_s = B_N^{-s}\sum_{j=1}^{N} E|Y_j|^s$.

Лемма 3. Пусть $\{\xi_k, k \in Z\}-$последовательность случайных величин, $\{b_{kN}, k \in Z, N \ge 1\}-$некоторая последовательность чисел. Положим

$$\zeta_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN}\xi_k. \tag{4}$$

Если $\rho_{kt} = E|\xi_k|^t < \infty$ для любого $k \in Z;$ ряд (4) сходится с вероятностью 1 и $\overline{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty$, то

$$E|\zeta_N|^t \le C(t,\overline{\varphi})\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_{kN}|^t \rho_{kt} + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN}^2 \rho_{k2} \right)^{t/2} \right\},$$

где $C(t,\overline{\varphi})-$ положительная постоянная, зависящая только от $t \ge 2$ и $\overline{\varphi}$.

Доказательства этой леммы легко следует из неравенства Розенталя для моментов сумм с.в. с $\varphi-$перемешиванием, принадлежащей С.А.Утеву [6].

Следующая оценка остаточного члена в центральной предельной теореме получена в работе [7], А.К.Мухамедовым.

Лемма 4. Пусть $\{Y_{kN}, k \in Z, N \ge 1\}-$ последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию р.с.п. с коэффициентом перемешивания

$$\varphi(n) \le Ke^{-\lambda n}, \quad 0 < K, \lambda < \infty,$$

$$EY_{kN} = 0, E|Y_{kN}|^s < \infty, 2 < s \le 3; k = 1,2,...,N, N \ge 1.$$

Тогда существует постоянная $C = C(s,K,\lambda)$, зависящая только от s, K и λ такая, что

$$\sup_x \left| P\left(\sum_{k=1}^{N} Y_{kN} < xD^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N} Y_{kN} \right) \right) - \Phi(x) \right| \le CL_{sN} \ln^{s-1}(N+1),$$

где $L_{sN} = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} |Y_{kN}|^s}{E^{s/2}\left(\sum_{k=1}^{N} Y_{kN} \right)^2}$.

П.3. Оценки дисперсии сумм линейного процесса

Пусть $\{\xi_k, k \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию полной регулярности, с коэффициентом п.р. $\rho(\cdot)$ и $\{X_{kN}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ линейный процесс, порожденный с.в. $\{\xi_k, k \in Z\}$, имеющий коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \ge 1\}$. В этом пункте получены оценки дисперсии суммы S_N, в случае, когда линейный процесс порожден последовательностью слабо зависимых с.в. при довольно общих условиях относительно коэффициентов $\{a_{kN}\}$.

Теорема 5. Если выполнены условия (1) – (3), то

$$\left|ES_N^2 - a^2\sigma^2 N\right| \le \left(4 + 37\sum_{k=1}^{\infty} k\rho(k)\right) b^2 E\xi_1^2.$$

Из теоремы 3, поскольку коэффициенты п.р. и р.с.п. связаны неравенством $\rho(k) \le 2\varphi^{1/2}(k)$, следует следующее следствие.

Следствие 1. Если $\{\xi_k, k \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность удовлетворяет условию р.с.п. и выполнены условия (1) – (3), то

$$\left|ES_N^2 - a^2\sigma^2 N\right| \le \left(4 + 74\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi^{1/2}(k)\right) b^2 E\xi_1^2.$$

Следствие 2. Если $\{\xi_k, k \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность $m-$ зависимых с.в., выполнены условия (2) – (3) и $\sigma^2 = E\xi_1^2 + 2\sum_{k=1}^{m} E\xi_1\xi_{1+k} < \infty$, то

$$\left|ES_N^2 - a^2\sigma^2 N\right| \le \left(4 + 19m(m+1)\right) b^2 E\xi_1^2 .$$

Следствие 3. Если $\{\xi_k, k \in Z\}-$последовательность одинаково распределенных, попарно независимых с.в. и выполнены условия (2), (3), то

$$\left|ES_N^2 - a^2 E\xi_1^2 N\right| \le 4b^2 E\xi_1^2.$$

Замечание. Если $\bar{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho(k) < \infty$, то из теоремы 3 следует, что

$$ES_N^2 = a^2\sigma^2 N + \theta b^2; \quad |\theta| \le C(\bar{\rho}), \qquad (5)$$

где $C(\bar{\rho})-$постоянная, зависящая только от $\bar{\rho}$.

Соотношение (5) не имеет место в случае, когда $a = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{kN} = 0.$ В этом случае, как показывает пример приведенной ниже, $B_N^2 = ES_N^2$ может принимать любое неотрицательное значение.

Пример. Пусть $\{X_n\}-$ линейный процесс, порожденный последовательностью независимых, одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k, k \in Z\}, E\xi_0 = 0, E\xi_0^2 = 1$, имеющий коэффициенты

$$a_{kN} = a_k = \begin{cases} 0, k \ge 0, k < -2 \\ \sqrt{c/2}, k = -1 \\ -\sqrt{c/2}, \kappa = -2, \end{cases}$$

где $c \geq 0$ произвольное число. Тогда $X_n = \sqrt{c/2}\left(\xi_{n+1} - \xi_{n+2}\right)$ и, следовательно $B_N^2 = E\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_N\right)^2 = \frac{c}{2} E\left(\xi_2 - \xi_{N+2}\right)^2 = c$.

Доказательство теоремы 3. Положим $b_k = b_{kN} = \sum_{j=1}^{N} a_{j-k,N}$. Тогда, сравнивая коэффициенты при $\xi_k, k \in Z$, несложно доказать следующее равенство:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} X_{nN} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN} \xi_k \tag{5}$$

Отсюда

$$B_N^2 = ES_N^2 = E\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN}\xi_k\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN}^2 E\xi_k^2 + 2\sum_{-\infty<k<l<\infty} b_{kN} b_{lN} E\xi_k \xi_l =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{j-k,N}\right)^2 E\xi_1^2 + 2\sum_{-\infty<k<l<\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{j-k,N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_{i-l,N}\right) E\xi_k\xi_l \tag{6}$$

Из (6), в силу равенств

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} a_{j-k,N}^2 = N\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN}^2$$

и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{1\leq j<i\leq N} a_{j-k,N} a_{i-k,N} = \sum_{-\infty<k<l<\infty;1<l-k<N} (N-l+k) a_{kN} a_{lN},$$

находим, что

$$a^2\sigma^2 N - B_n^2 = \left(N\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN}^2 + 2\sum_{-\infty<k<l<\infty} N a_{kN} a_{lN}\right)\left(E\xi_1^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_1\xi_{1+k}\right) -$$

$$- N\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN}^2 E\xi_1^2 - 2\sum_{-\infty<k<l<\infty}(N-l-k) a_{kN} a_{lN} E\xi_1^2 -$$

$$-2\sum_{-\infty<k<l<\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{j-k,N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_{i-l,N}\right) E\xi_k\xi_l = 2\sum_{-\infty<k<l<\infty} N a_{kN} a_{lN} E\xi_1^2 +$$

$$+4\sum_{-\infty<k<l<\infty} N a_{kN} a_{lN}\sum_{\upsilon=1}^{\infty} E\xi_1\xi_{1+\upsilon} + 2N\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN}^2 \sum_{\upsilon=1}^{\infty} E\xi_1\xi_{1+\upsilon} -$$

$$-2\sum_{-\infty<k<l<\infty}(N-l+k) a_{kN} a_{lN} E\xi_1^2 - \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{N} a_{j-k,N} a_{i-k-\upsilon,N}\right) E\xi_1\xi_{1+\upsilon} =$$

$$= 2\sum_{-\infty<k<l<\infty}(l-k) a_{kN} a_{lN} E\xi_1^2 + 2N\sum_{-\infty<k<l<\infty, l-k\geq N} a_{kN} a_{lN} E\xi_1^2 +$$

$$+ 2\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{-\infty<k<l<\infty} a_{kN} a_{lN}\right) N - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{N} a_{j-k,N} a_{i-k-\upsilon,N}\right] E\xi_1\xi_{1+\upsilon} \tag{7}$$

Применяя элементарное неравенство $|a-b| \leq |a| + |b|$ и условие (3) находим

$$2\left|\sum_{k<l}(l-k) a_{kN} a_{lN}\right| + 2\left|\sum_{k<l, l-k\geq N} N a_{kN} a_{lN}\right| \leq 2\sum_{k<l}(l-k)|a_{kN}||a_{lN}| \leq$$

$$\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{kN}|\left(\sum_{l=k+1}^{\infty}|k||a_{lN}| + \sum_{l=k+1}^{\infty}|l||a_{lN}|\right) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k||a_{kN}|\sum_{l=k+1}^{\infty}|a_{lN}| +$$

$$+2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{kN}|\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_{jN}|\sum_{i=j+1}^{\infty}|i||a_{iN}|\le 4b^2 . \tag{8}$$

Оценим теперь третью сумму в равенстве (7), которую обозначим через I. Сначала заметим, что если υ, $1\le\upsilon\le N$ фиксированное число, то

$$\sum_{1\le i,j<N,j=i-v}1 \quad =\max\{0,N-\upsilon\}.$$

Обозначим через w_N и w'_N соответственно, количество решений систем диофантовых уравнений

$$\begin{cases}x-z=m\\ y-z-\upsilon=n\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x-z=n\\ y-z-\upsilon=m\end{cases}$$

в целых числах $z\in Z; x,y\in\{1,2,...,N\}$, где $m,n\in Z,1\le\upsilon\le N$ фиксированные числа. Тогда, легко подсчитать, что $w_N=0$, при $n-m+\upsilon\ge N$ и $w_N=N-n+m-\upsilon$ при $n-m+\upsilon<N$. Аналогично $w'_N=N$ при $n-m\ge\upsilon$ и $w'_N=N+n-m-\upsilon$ при $n-m<\upsilon$. Учитывая вышеприведенные замечания мы перепишем сумму I в виде

$$I=2\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\Bigg[\sum_{k=-\infty}^{\infty}Na_{kN}^2+2\sum_{m<n}Na_{mN}a_{nN}-\sum_{-\infty<k<\infty,\upsilon\le N}(N-\upsilon)a_{kN}^2-$$
$$-\sum_{m<n}w_Na_{mN}a_{nN}-\sum_{m<n}w'_Na_{mN}a_{nN}\Bigg]E\xi_1\xi_{1+\upsilon} .$$

Так как

$$\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\sum_{m<n}w_Na_{mN}a_{nN}=\sum_{m<n}\sum_{1\le\upsilon<N-n+m}(N-n+m-\upsilon)a_{mN}a_{nN}=$$
$$=\sum_{m<n}\sum_{\upsilon=1}^{N-n+m-1}Na_{mN}a_{nN}-\sum_{m<n}\sum_{1\le\upsilon<n-n+m}(n-m+\upsilon)a_{mN}a_{nN}$$

и

$$\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\sum_{m<n}w'_Na_{mN}a_{nN}=\sum_{m<n}\left[\sum_{\upsilon=1}^{n-m-1}Na_{mN}a_{nN}+\sum_{\upsilon=n-m}^{\infty}(N-n+m-\upsilon)a_{mN}a_{nN}\right]=$$
$$=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\sum_{m<n}Na_{mN}a_{nN}-\sum_{m<n}\sum_{\upsilon=n-m}^{\infty}(n-m-\upsilon)a_{mN}a_{nN}=$$
$$=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\sum_{m<n}Na_{mN}a_{nN}+\sum_{m<n}\sum_{\upsilon=n-m}^{\infty}(\upsilon-n+m)a_{mN}a_{nN},$$

то

$$I=2\Bigg[\sum_{\upsilon=1}^{N}\upsilon\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{kN}^2\right)+\sum_{\upsilon>N}N\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{kN}^2\right)+\sum_{m<n}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}Na_{mN}a_{nN}-$$
$$-\sum_{m<n}\sum_{1\le\upsilon<N-n+m}Na_{mN}a_{nN}+\sum_{m<n}\sum_{1<\upsilon<N-n+m}(n-m+\upsilon)a_{mN}a_{nN}-$$
$$-\sum_{m<n}\sum_{\upsilon>n-m}(\upsilon-n+m)a_{mN}a_{nN}\Bigg]E\xi_1\xi_{1+\upsilon}=I_1+I_2+I_3-I_4,$$

где

$$I_1=2\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left(\sum_{k-\infty}^{\infty}a_{kN}^2\right)E\xi_1\xi_{1+\upsilon} ,\ I_2=2\sum_{m<n}\sum_{\upsilon\ge N-n+m}Na_{mN}a_{nN}E\xi_1\xi_{1+\upsilon},$$
$$I_3=2\sum_{m<n}\sum_{\upsilon<N-n+m}(n-m+\upsilon)a_{mN}a_{nN}E\xi_1\xi_{1+\upsilon} ,\ I_4=2\sum_{m<n}\sum_{\upsilon>n-m}(\upsilon-n+m)a_{mN}a_{nN}E\xi_1\xi_{1+\upsilon} .$$

Оценка I_1**.** Положим $\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN}^2$. Тогда, применяя определения коэффициента перемешивания $\rho(\upsilon)$, находим

$$I_1 \le 2\tau \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon \left| E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} \right| \le 4\tau \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon \rho(\upsilon) E\xi_1^2 .$$

Оценка I_2**.** Имеем

$$I_2 = 2N \sum_{m<n} a_{mN} a_{nN} \sum_{\upsilon \ge N+m-n} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} = 2N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{mN} a_{nN} \sum_{\upsilon \ge N+m-n} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} =$$

$$= 2N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mN} a_{m+k,N} \sum_{\upsilon \ge 1; \upsilon \ge N-k} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} .$$

Пусть $Q(N)$ – любое целое число, удовлетворяющее условию $2 \le 2Q(N) < N$ Область суммирования разбиваем на несколько частей:
1) $|m| \le Q(N); N - Q(N) \le k < N$, 2) $|m| > Q(N)$; 3) $|m| \le Q(N); 1 \le k \le N - Q(N)$,
4) $|m| \le Q(N); k \ge n$. Соответствующие суммы обозначим через $I_{21}, I_{22}, I_{23}.I_{24}$.

Оценка I_{21}**.** Воспользуясь определением коэффициента полной регулярности, находим

$$I_{21} = 2 \sum_{|m| \le Q(N)} \sum_{k=N-Q(N)}^{N-1} N a_{mN} a_{m+k,N} \sum_{\upsilon \ge \max(1, N-k)} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} \le$$

$$\le 2N \sum_{|m| \le Q(N)} |a_{mN}| \sum_{n \ge N-2Q(N)} |a_{nN}| \cdot \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \rho(\upsilon) \le$$

$$\le 2N\bar{\rho} \sum_{|m| \le Q(N)} |a_{mN}| \sum_{n \ge N-2Q(N)} |a_{nN}| \le \frac{2N\bar{\rho} b^2}{N - 2Q(N)} E\xi_1^2 ,$$

где $\bar{\rho} = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon \rho(\upsilon)$.

Таким образом

$$I_{21} \le \frac{2N\bar{\rho} b^2}{N - 2Q(N)} E\xi_1^2 .$$

Оценка I_{22}**:**

$$I_{22} = 2N \sum_{|m| > Q(N)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mN} a_{m+k,N} \sum_{\upsilon \ge \max(1, n-k)} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} \le$$

$$\le 2\bar{\rho} N \sum_{|m| > Q(N)} |a_{mN}| \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_{nN}| \le \frac{2\bar{\rho} b^2}{Q(N)} E\xi_1^2 .$$

Оценка I_{23}**.** Здесь $N - k \ge Q(N)$ и в силу определения $\rho(\upsilon)$ мы имеем

$$I_{23} = 2N \sum_{|m| \le Q(N)} \sum_{k=1}^{N-Q(N)} a_{mN} a_{m+k} \sum_{\upsilon=Q(N)}^{\infty} E\xi_1 \xi_{1+\upsilon} \le$$

$$\le 2N \sum_{m} |a_{mN}| \sum_{n} |a_{nN}| \sum_{\upsilon=Q(N)}^{\infty} \rho(\upsilon) E\xi_1^2 \le \frac{2\bar{\rho} b^2 N}{Q(N)} E\xi_1^2 .$$

Оценка I_{24}**.** В этом случае $m + k \ge N - Q(N)$, следовательно

$$I_{24} = 2\sum_{|m|\le Q(N)} Na_{mN}\sum_{k=N}^{\infty} a_{m+k}\sum_{\upsilon=1}^{\infty} E\xi_1\xi_{1+\upsilon} \le$$

$$\le 2\sum_{|m|\le Q(N)} N|a_{mN}|\sum_{n=N-Q(N)}^{\infty} |a_{nN}|\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\rho(\upsilon)E\xi_1^2 \le \frac{2\overline{\rho}b^2 N}{N-Q(N)}E\xi_1^2 \,.$$

Учитывая полученные, для $I_{21} - I_{24}$ оценки, и пологая $Q(N) = \dfrac{N}{3}$, мы находим окончательную оценку для I_2:

$$I_2 \le 21\overline{\rho}b^2 E_1^2 \,.$$

Оценка I_3. Так как

$$\sum_{\upsilon=1}^{N-(m-n)} \upsilon|E\xi_1\xi_{1+\upsilon}| \le \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\rho(\upsilon)E\xi_1^2 = \overline{\rho}E\xi_1^2 \,,$$

то, поступая также как и при выводе неравенства (8), находим

$$I_3 = 2\sum_{m<n}\sum_{\upsilon<N-n+m}(n-m+\upsilon)a_{mN}a_{nN}E\xi_1\xi_{1+\upsilon} \le 2\sum_m a_{mN}\sum_{n=m+1}^{\infty}(n-m)a_{nN}\sum_{\upsilon=1}^{N-(m-n)}E\xi_1\xi_{1+\upsilon} +$$

$$+2\sum_m a_{mN}\sum_{n=M+1}^{\infty} a_{nN}\sum_{\upsilon=1}^{N-(m-n)}\upsilon E\xi_1\xi_{1+\upsilon} \le (4\overline{\rho}b^2 + 2\overline{\rho}b^2)E\xi_1^2 = 6\overline{\rho}b^2E\xi_1^2 \,.$$

I_4 оценивается аналогично:

$$I_4 = 2\sum_{m<n}\sum_{\upsilon>n-m}(\upsilon-m+n)a_{mN}a_{nN}E\xi_1\xi_{1+\upsilon} \le$$

$$\le 2\sum_M\sum_{N=m+1}^{\infty}(n-m)|a_{mN}||a_{nN}|\sum_{\upsilon=1}^{\infty}|E\xi_1\xi_{1+\upsilon}| +$$

$$+2\sum_m\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_{mN}||a_{nN}|\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon|E\xi_1\xi_{1+\upsilon}| \le 6\overline{\rho}b^2E\xi_1^2 \,.$$

Теперь, собирая оценки для I_1, I_2, I_3, I_4, мы получим

$$I \le 37\overline{\rho}b^2E\xi_1^2 \qquad (9)$$

Доказательство теоремы, теперь следует из равенства (7), согласно неравенств (8) и (9).

П.4. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $Q-$ произвольное целое положительное число. Введем следующую последовательность с.в.

$$Y_{0N} = \sum_{k=-\infty}^{-Q-1} b_k\xi_k,\ \ Y_{kN} = b_{k-Q-1}\xi_{k-Q-1}; k = 1,2,...,2Q+1,\ \ Y_{2Q+2} = \sum_{k=Q+1}^{\infty} b_k\xi_k \,. \qquad (10)$$

Случайные величины $\{Y_{kN}, 0 \le k \le 2Q+2, N \ge 1\}$ очевидно удовлетворяют условию р.с.п., с коэффициентом перемешивания $\varphi(\cdot)$. Кроме того из равенства (5) следует, что $S_N = \sum_{k=0}^{2Q+2} Y_{kN}$ и $D\left(\sum_{k=0}^{2Q+2} Y_{kN}\right) = B_N^2$. Поэтому из леммы 4, находим

$$\Delta(F_N, \Phi) = \sup_x\left|P\left(\sum_{k=0}^{2Q+2} Y_{kN} < xD^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{2Q+2} Y_{kN}\right)\right) - \Phi(x)\right| \le$$

$$\leq C(s,K,\lambda)\frac{\sum_{|k|\leq Q}|b_k|^s\rho_s + E\left|\sum_{k=-\infty}^{-Q-1} b_k\xi_k\right|^s + E\left|\sum_{k=Q+1}^{\infty} b_k\xi_k\right|^s}{B_N^s}\ln^{s-1}(N+1) \qquad (11)$$

Из леммы 3 следует неравенство

$$E\left|\sum_{k=-\infty}^{-Q-1} b_k\xi_k\right|^s \leq C(s,\varphi)\left\{\sum_{k=-\infty}^{-Q-1}|b_k|^s\rho_s + \left(\sum_{k=-\infty}^{-Q-1} b_k^2\rho_2\right)^{s/2}\right\} \leq C_1(s,\varphi)\left(\sum_{k=-\infty}^{-Q-1} b_k^2\right)^{s/2}\rho_s .$$

Аналогично

$$E\left|\sum_{k=Q+1}^{\infty} b_k\xi_k\right|^s \leq C_2(s,\varphi)\left(\sum_{k=Q+1}^{\infty} b_k^2\right)^{s/2}\rho_s .$$

Применяя эти неравенства, мы из (11), имеем

$$\Delta(F_N,\Phi) \leq C_3(s,K,\lambda)B_N^{-s}\left\{\sum_{|k|\leq Q}|b_k|^s\rho_s + \left(\sum_{|k|>Q} b_k^2\right)^{s/2}\rho_s\right\}\ln^{s-1}(N+1) .$$

Отсюда, переходя к пределу при $Q\to\infty$, мы придем к утверждению теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Из следствия 1, мы имеем

$$B_N^2 \geq a^2\sigma^2 N - c(\varphi)b^2 ,$$

где $c(\varphi) = 4 + 74\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi^{1/2}(k)$. Не ограничивая общности можно считать, что

$$c(\varphi)b^2 \leq \frac{1}{2}a^2\sigma^2 N , \qquad (12)$$

В противном случае, т.е. если $c(\varphi)b^2 > \frac{1}{2}a^2\sigma^2 N$, то в силу очевидных неравенств $|a| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{kN}| \leq b$ и $\rho_s^{1/s} \geq \rho_2^{1/2} = \left(E\xi_0^2\right)^{1/2} = 1$, имеем

$$\frac{b\rho_s}{|a|^s\sigma^{s-2}}\cdot\frac{1}{N^{(s-2)/2}} \geq \left(\frac{b}{|a|}\right)^2\frac{1}{(2c(\varphi))^{(s-2)/2}} \geq \frac{1}{(2c(\varphi))^{(s-2)/2}}$$

и, следовательно

$$\Delta(F_N,\Phi) \leq (2c(\varphi))^{s-2}\frac{b^s\rho_s}{|a|^s\sigma^{s-2}}\cdot\frac{1}{N^{(s-2)/2}}$$

т.е. утверждение теоремы2 справедливо, с $C(s,K,\lambda) = (2c(\varphi))^{s-2}$.

Таким образом, можно считать, что справедливо неравенство (12) и поэтому

$$B_N^2 \geq \frac{a^2\sigma^2 N}{2} \qquad (13)$$

Кроме того из следствия 3, следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^2 \leq a^2 N + 4b^2 \qquad (14)$$

Из теоремы 1, в силу неравенств (13) и (14), мы имеем

$$\Delta(F_N,\Phi) \le C(s,K,\lambda)\frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|b_{kN}|^s \rho_s}{B_N^s}\ln^{s-1}(N+2) \le$$

$$\le C(s,K,\lambda)\frac{b^2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_k^2\rho_s}{B_N^s}\ln^{s-1}(N+2) \le$$

$$\le 5C(s,K,\lambda)2^{s/2}\frac{b^s\rho_s}{|a|^s\sigma^s}\frac{\ln^{s-1}(N+2)}{N^{(s-2)/2}},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Пусть $Y_{0N},Y_{1N},...,Y_{2Q+2}$ случайные величины определенные формулой (10). Тогда последовательность $\{Y_{kN},0\le k\le 2Q+2,N\ge 1\}$ удовлетворяет условию $m-$ зависимости, $S_N=\sum\limits_{k=0}^{2Q+2}Y_{kN}$ и $D\left(\sum\limits_{k=0}^{2Q+2}Y_{kN}\right)=B_N^2$. Теперь теорема 3 доказывается точно также, как и теорема 2, только в соответствующих местах вместо лемм 4 и 3 используется леммы 2 и 1.

Доказательство теоремы 4. $|a|\le\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|a_{kN}|\le b$, $\rho_s^{1/s}\ge 1$ и $0<\sigma^2\le 2m+1$, то $\left(\frac{b\rho_s^{1/s}}{|a|\sigma}\right)^s\ge\left(\frac{1}{2(m+1)}\right)^{s/2}$. Отсюда, если $m+1\ge N,$ то Отсюда, если $m+1\ge N$, то

$$(m+1)^{s-1}\left(\frac{b\rho_s^{1/s}}{|a|\sigma}\right)^s\frac{1}{N^{(s-2)/2}}\ge\frac{1}{2^{s/2}}$$

и, следовательно, утверждение следствия 2 имеет место с $C(s)=2^{s/2}$, так как

$$\Delta_N\le 1\le 2^{s/2}(m+1)^{s-1}\left(\frac{b\rho_s^{1/s}}{|a|\sigma}\right)^s\frac{1}{N^{(s-2)/2}}.$$

Таким образом, можно считать, что $m+1\le N.$

Аналогично не ограничивая общности можно полагать, что

$$\frac{13(m+1)^2b^2\rho_2}{a^2\sigma^2N}\le\frac{1}{2}, \qquad (15)$$

в противном случае, утверждение теоремы 4 тривиально выполняется (см. доказательство теоремы 2).

Из следствия 2 следует неравенство

$$B_n^2\ge a^2\sigma^2N-13(m+1)^2b^2.$$

Отсюда, согласно (15), мы имеем $B_N^2\ge\frac{a^2\sigma^2N}{2}$.

Из теоремы 3, в силу (14), (15), учитывая последнее неравенство (поступая точно также, как и при доказательстве теоремы 2) мы придем к утверждению теоремы 4.

Литература

1. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. Центральная предельная теорема для линейных процессов. УзМУ хабарлари 2010, №3, 79 – 86 б.
2. Т.М.Зупаров. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для линейных процессов из R^k. Изв. АН УзССР, сер физ.-мат.наук, №4, 1984.
3. Зупаров Т.М., Якупов К. О принципе инвариантности для линейных процессов. – Изв.Вузов, сер. физ.мат. наук 2000, №1-2.
4. Т.М.Зупаров. Исследование по предельным теоремам для сумм слабо зависимых банаховозначных случайных величин. Автореферат дисс. на соиск. ученой степени доктора физ.-мат. наук. Ташкент – 1993 г.
5. В.В.Шергин. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для $m-$ зависимых случайных величин. Теория вероят. и её примен. т.18, №4, (1979), с.781 – 794.
6. С.А.Утев. Суммы случайных величин с $\varphi-$перемешиванием. Тр. Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т.13, с. 76 – 100.
7. А.К.Мухамедов. Равномерные и неравномерные оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин. Ред. ж. «Изв.АН Уз ССР», сер. физ.-мат. наук, Ташкент, 1986 (Рук. депонир. в ВИНИТИ 4, 12, 1986, №8284 – В86), 26 с.

Предельные теоремы для линейных процессов, порожденных слабо зависимой последовательностью случайных величин и векторов.

Т.М.Зупаров

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}$– стационарная в узком смысле последовательность случайных величин (с.в.). Будем предполагать, что величины ξ_i имеют нулевые средние и конечные дисперсии. Пусть далее $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$– последовательность чисел такая, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}^2 < \infty . \qquad (1)$$

Последовательность с.в. $\{X_{kN}, 1 \leq k \leq N, N \geq 1\}$ называется линейным процессом, имеющим коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$ и порожденными случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$, если ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$ сходится с вероятностью 1 и $X_k = X_{kN} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{iN}\xi_{k-i}$.

Широкое развитие теории случайных процессов, математической статистики, а также применение вероятностных методов в экономике и в биологии вызывают необходимость изучения предельного поведения линейных процессов, порожденных последовательностью независимых или слабо зависимых случайных величин (с.в) . Как стационарные решения стохастических разностных уравнений, такие процессы служат математической моделью накапливающихся ошибок при последовательных уточнениях экспериментальных данных. Кроме того, линейные процессы адекватно описывают некоторые временные изменения в естественных и технических науках и в экономике.

Положим $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k, B_N^2 = DS_N, F_N(x) = P(S_N < xB_N), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$,

$$\Delta_N(x) = \Delta_x(F_N, \Phi) = |F_N(x) - \Phi(x)|, \Delta(F_N, \Phi) = \sup_x \Delta_x(F_N, \Phi),$$

$$b_{kN} = a_{1-k,N} + a_{2-k,N} + \ldots + a_{N-k,N} .$$

Предельные теоремы для линейных процессов, порожденных последовательностью независимых случайных величин

Асимптотическая нормальность S_N / B_N и оценки скорости сходимости к нулю величин $\Delta_x(F_N, \Phi)$ и $\Delta(F_N, \Phi)$ когда $\{\xi_i, i \in Z\}$– независимая последовательность с.в., изучена достаточно подробно. Первый результат в этом направлении принадлежит И.А.Ибрагимову (см [9], гл. XV111). В этой работе, а также в работе [10], центральная предельная теорема при довольно жестких условиях на коэффициенты. В работе [5] (результаты работы [5] были анонсированы в работе [4]) доказана центральная предельная теорема и получена неравномерная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов порожденных независимыми и одинаково распределенными с.в. $\{\xi_k; k \in \mathbf{Z}\}$, удовлетворяющих условиям (1) и

$$E\xi_1 = 0 \text{ и } E\xi_1^2 = 1 \qquad (2)$$

Приведем основные результаты этой работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1) и (2). Если, кроме того, при $N \to \infty$

$$\sup_n \left| \frac{b_{nN}}{B_N} \right| = o(1),$$

то

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x) = \Phi(x) \qquad \forall x \in R.$$

Теорема 2. Если выполнены условия (1), (2) и для некоторого $o < \delta \le 1$,

$$\rho_{2+\delta} = E\left|\xi_1\right|^{2+\delta} < \infty,$$

то

$$\Delta_N(x) \le C(\delta) \frac{\rho_{2+\delta}}{\left(1+|x|\ \right)^{2+\delta}} \cdot \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |b_{kN}|^{2+\delta}}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN}^2\right)^{1+\delta/2}},$$

где $C(\delta)-$некоторая положительная постоянная, зависящая только от δ.

Из теоремы 2, непосредственно следует следующая оценка для $\Delta_N(x)$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$\Delta_N(x) \le C(\delta) \frac{\rho_{2+\delta}}{\left(1+|x|\right)^{2+\delta}} \cdot \sup_n \left| \frac{b_{nN}}{B_N} \right|^{\delta}.$$

Теорема 3. Если коэффициенты линейного процесса $\{X_{nN}; 1 \le n \le N; N \ge 1\}$ таковы, что выполнены условия

$$0 \ne a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kN} < \infty \qquad (3)$$

и

$$b = \sum_{-\infty}^{\infty} |k||a_{kN}| + |a_{0N}| < \infty, \qquad (4)$$

то

$$\Delta_N(x) \le C_1(\delta) \left(\frac{b}{|a|\sqrt{N}} \right)^{\delta} \frac{\rho_{2+\delta}}{\left(1+|x|\right)^{2+\delta}}.$$

В случае, когда $\{\xi_i, i \in Z\}-$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве R^k – оценка порядка $O\left(N^{-1/2}\right)$ в ц.п.т. для линейных процессов, получена в работе [1].

Пусть $\{X_{kN}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ линейный процесс, имеющий коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \ge 1\}$ и порожденный случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$. Рассмотрим точки отрезка [0,1] вида $t_k = \dfrac{\sigma_k^2}{\sigma_N^2}$, где $\sigma_k^2 = E\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i\right)^2$, упорядочим их и построим на отрезке [0,1] непрерывную случайную ломаную $W_N(t)$ с вершинами в точках $\left(t_k, \sum_{i=1}^{k} X_i / |a| \sigma_N\right)$.

В работе [2] установлен принцип инвариантности и получена оценка скорость сходимости к нулю расстояния Леви – Прохорова для линейных процессов, порожденных независимой последовательностью одинаково распределенных случайных величин.

Положим $a_+ = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kN}; a_- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-kn}, \Gamma_{m,N}^2 = \max\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{kN}\right)^2; \sum_{j=m}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} a_{-kN}\right)^2\right\}$,

W_N –распределение $W_N(t)$ и через W, обозначим распределение стандартного винеревского процесса. При этих обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (2), (3) и

$$\min\left\{\frac{a_+}{a}; \frac{a_-}{a}\right\} = o(1) \quad \text{при} \quad N \to \infty;$$

$$\frac{\Gamma_{0N}^2}{a^2} = o(1) \quad \text{при} \quad N \to \infty;$$

Для любой последовательности целых положительных $Q_N; Q_N \to \infty$, при $N \to \infty$;

$$\frac{\Gamma_{Q_N N}^2}{a^2} = o(1).$$

Тогда при $N \to \infty$ $W_N \Rightarrow W$.

Определим $L(P,Q)$– расстояние Леви – Прохорова между распределениями P и Q:

$$L(P,Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0; P(A) \le Q(A^\varepsilon) + \varepsilon; \forall A \in \Re_C\right\},$$

где $\Re_C$ – σ–алгебра борелевских множеств пространства $C_{[0,1]}$ и A^ε означает ε– окрестность множества A.

Теорема 5. Если выполнены условия (2), (3) и для некоторого $t > 2$, $\rho_t < \infty$, то существует постоянная $C(t)$ такая, что

$$L(W_N, W) \le C(t) \rho_t^{1/(t+1)} N^{-\frac{t-2}{2(t+1)}} \left(1 + \left(\frac{\Gamma_{0N}^2}{a^2}\right)^{\frac{t}{2t)t+1)}} + \left(\frac{|a_-|}{|a_+|}\right)^{\frac{t}{t+1}}\right).$$

В работе [7] получена неравномерная оценка порядка $O\left(N^{-1/2+\varepsilon}\right)$ скорости сходимости в центральной предельной теореме (ц.п.т.) для линейного процесса в сепарабельном гильбертовом пространстве с нормой $|\cdot|$

на шарах с центром в точке x. В работе [11] доказана ц.п.т. для линейных процессов в банаховом пространстве имеющий тип 2.

Таким образом, предельные теоремы для линейных процессов, порожденных независимой последовательностью случайных величин и векторов изучены довольно подробно, однако и в этом случае остается много неизученных задач. К таковым можно отнести установление закона повторного логарифма, усиленных законов больших чисел в банаховом пространстве и др.

Кроме того предельные теоремы для линейных процессов, порожденных строго стационарной последовательностью, удовлетворяющих тому или другому условию слабой зависимости.

В этом направлении следует отметить работу [6], где получена оценка дисперсии сумм линейного процесса и оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных строго стационарной последовательностью, удовлетворяющая условию р.с.п.

Литература

1. Т.М.Зупаров. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для линейных процессов из R^k. Изв. АН УзССР, сер физ.-мат.наук, №4, 1984.

2. Зупаров Т.М., Якупов К. О принципе инвариантности для линейных процессов. – Изв.Вузов, сер. физ.мат. наук 2000, №1-2.

3. Т.М.Зупаров, С.Пулатов. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов в банаховом пространстве. – Материалы научной конференции «Сираждиновские чтения» по теории вероят. и математ. стат. Ташкент 2004 г., с. 42 – 47.

4. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. Центральная предельная теорема для линейных процессов.// Материалы респуб. научн. конфер. «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» - Ташкент. 2008.

5. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. Центральная предельная теорема для линейных процессов. УзМУ хабарлари 2010, №3, 79 – 86 б.

6. Т.М.Зупаров, Ш.Шорахмедов, Ш.Т.Зупаров. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных слабо зависимой последовательностью случайных величин. Материалы V1 – Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вер. и их приложения" Фергана 2011, 65 – 68 с.

7. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. О скорости сходимости в центральной

предельной теореме для линейных процессов в гильбертовом пространстве. Материалы V1 – Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вер. и их приложения" Фергана 2011, 62 – 64 с.
9. И.А.Ибрагимов
10.

Литература

1. Т.М.Зупаров. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для линейных процессов из R^k. Изв. АН УзССР, сер физ.-мат.наук, №4, 1984.

2. Зупаров Т.М., Якупов К. О принципе инвариантности для линейных процессов. – Изв.Вузов, сер. физ.мат. наук 2000, №1-2.

3. Т.М.Зупаров, С.Пулатов. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов в банаховом пространстве. – Материалы научной конференции «Сираждиновские чтения» по теории вероят. и математ. стат. Ташкент 2004 г., с. 42 – 47.

4. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. Центральная предельная теорема для линейных процессов.// Материалы респуб. научн. конфер. «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» - Ташкент. 2008.

5. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. Центральная предельная теорема для линейных процессов. УзМУ хабарлари 2010, №3, 79 – 86 б.

6. Т.М.Зупаров, Ш.Шорахмедов, Ш.Т.Зупаров. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных слабо зависимой последовательностью случайных величин. Материалы V1 – Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вер. и их приложения" Фергана 2011, 65 – 68 с.

7. Т.М.Зупаров, Ш.Т.Зупаров. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов в гильбертовом пространстве. Материалы V1 – Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вер. и их приложения" Фергана 2011, 62 – 64 с.

9. И.А.Ибрагимов

10.