Структура зависимости слагаемых Абелевых сумм со случайными коэффициентами

Т.М.Зупаров, Б.Б.Халхаджаев

Tasodifiy koeffitsiyentli Abel yig'indilari qo'shiluvchilarining bog'liqlik strukturasi.

Ushbu maqolada tasodifiy koeffitsiyentli $S_n(\eta)=\sum_{j=0}^{n}\eta^j\xi_j$, Abel yig'indilari o`rganilgan. Bu yerda $\eta-$tasodifiy miqdor $\{\xi_j,\, j=0,1,2,...\}$ketma-ketlikka bog`liq bo`lmagan ihtiyoriy tartibli nomanfiy chekli momentlarga ega. Agar $\{\xi_j\}$ ketma ketlik $2k$ gacha bo`lgan barcha momentlarda o`rinli bo`lib, bog`liqsizlik shartini qanoatlantirsa, tasodifiy $\zeta_j=\eta^j\xi_j,\, j=0,1,...,n,$ Abel yig`indilarining qo`shiluvchilari ihtiyoriy $k\in\mathbb{N}$ uchun $k-$tartibli (A(k)) assotsirlanganlikni qanoatlantirishi isbotlangan.

Kalit so`zlar: Abel yig'indilari, assotsirlanganlik, chekli momentlar, bog'liqlik strukturasi.

The structure of the dependence of the terms of Abelian sums with random coefficients

The work is devoted to the study of the Abelian sum with random coefficients $S_n(\eta)=\sum_{j=0}^{n}\eta^j\xi_j$, where $\eta-$ is a random variable having non-negative finite moments of any order, independent of the sequence $\{\xi_j,\, j=0,1,2,...\}$. It is proved that the terms of a random Abelian sum $\zeta_j=\eta^j\xi_j,\, j=0,1,...,n,$ satisfy the condition of association of the $k-$th order (A (k)) for any $k\in\mathbb{N}$ if the sequence $\{\xi_j\}$ has all moments up to 2k -th order and satisfies the independence condition.

Keywords: Abelian sum, association, finite moments, structure of the dependence

1. Введение. Сравнивая результаты, полученные для обычных и взвешенных сумм можно заключить, что на случай взвешенных сумм переноситься далеко не все факты, доказанные для обычных сумм. В частном случае взвешенных сумм $S_n(v)-$ для схем суммирования независимых случайных величин (н.с.в.) по Абелю

$$S_n(v)=\sum_{j=0}^{n} v^j \xi_j, \quad v\in(0,1),$$

где $\{\xi_j,\, j\geq 0\}$ – н.с.в.,, в этом вопросе удается продвинутся значительно дальше (см. [1, 2, 3, 4]).

Помимо этого, к этой схеме суммирования приводят многие прикладные задачи.

Аналог известной теоремы Берри-Эссена для $S_n(v)$ получен в работе [1]. Дальнейшие исследования по предельным теоремам для схеме суммирования н.с.в. по Абелю, когда каждая ξ_j имеет различные распределения проводились С.Х.Сираждиновым и М.У.Гафуровым [2].

Данная работа посвящена исследованию Абелевой суммы со случайными коэффициентам $S_n(\eta)=\sum_{k=0}^{n}\eta^k\xi_k$, где $\eta-$случайная величина, имеющая неотрицательные конечные моменты любого порядка, не зависящая от последовательности н.с.в. $\{\xi_k, k=0,1,2,...\}$. Определена структура зависимости слагаемых случайной Абелевой суммы $\zeta_k=\eta^k\xi_k,\ k=0,1,...,n,$ когда последовательность $\{\xi_k, k=0,1,2,...\}$ удовлетворяет условию независимости.

Пункт 2 посвящен формулировки необходимых определений. Кроме того, здесь приведены вспомогательные утверждения и основные результаты работы, доказательству этих теорем посвящен следующий пункт 3.

2. Основные понятия и результаты

Определение 1 [5]. Конечный набор с.в. $\{\xi_j, 1\leq j\leq n\}$ называется ассоциированным , если для произвольных по компонентною неубывающих функций f и g выполняется неравенство

$$cov\big(f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)g(\xi_1,\xi_2,....\xi_n)\big)\geq 0.$$

Определение 2.

$n-$мерная функция вида $P_k(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{1\le i_1,i_2,...,i_k\le n} a_{i_1,i_2,...,i_k}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$, где $a_{i_1,i_2,...,i_k}$ произвольные действительные числа называется полиномом $\kappa-$того порядка и обозначается через $P_k(x)$.

Следующее определения ассоцированнсти $k-$ того порядка которое обобщает понятия ассоцированности, введен Ш.Шарахмедовым в работе [5].

Определение 3 [5]. Конечный набор с.в. $\{\xi_j, 1\le j\le n\}$ называется ассоциированным $k-$того порядка $(A(k)), k\in\mathbb{N},$ если для всех полиномов $P_l, P_m, l,m\in\{0,1,...,k\}$ с неотрицательными коэффициентами выполняется неравенство

$$\operatorname{cov}\left(P_l(\xi_1,...,\xi_n)P_m(\xi_1,...,\xi_n)\right)\ge 0.$$

Следующая теорема определяет структуру зависимости слагаемых Абелевой суммы.

Теорема1. Пусть η некоторая случайная величина имеющая неотрицательные конечные моменты $0\le M\eta^j<\infty,\ j=1,2,...,2k,\ k\in\mathbb{N}.$ $\{\xi_i, i=0,1,...,n\}$ семейство н.с.в. Кроме того если $0\le M\xi_i^j<\infty,\ j=1,...,2k,\ i=0,1,...,n$ то набор с.в. $\{\zeta_i=\eta^i\xi_i,\ 0\le i\le n\}$ является $A(k)$ ассоциированным.

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Пусть $l,h\in\mathbb{N}, 0\le l,h\le k$,

$$\mathrm{P}_l(x)=P_l(x_0,x_1,...,x_n)=\sum_{0\le i_1,i_2,...,i_l\le n} a_{i_1,i_2,...,i_l}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_l}$$

и

$$\mathrm{P}_h(x)=P_h(x_0,x_1,...,x_n)=\sum_{0\le i_1,i_2,...,i_h\le n} b_{i_1,i_2,...,i_h}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_h}$$

произвольные полиномы с неотрицательными коэффициентами. Тогда, согласно определения 3, для доказательства теоремы 1, достаточно показать справедливость соотношения

$$cov(P_l(\zeta), P_h(\zeta)) \ge 0, \quad \forall l, h \in \{0,1,...,k\} \ . \tag{1}$$

Имеем

$$\operatorname{cov}\left(P_l(\zeta), P_h(\zeta)\right) = M\left(\sum_{0 \le i_1, i_2, ..., i_l \le n} a_{i_1, i_2, ..., i_l} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l} \sum_{0 \le j_1, j_2, ..., j_h \le n} b_{j_1, j_2, ..., j_h} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h}\right) -$$

$$-M\left(\sum_{0 \le i_1, i_2, ..., i_l \le n} a_{i_1, i_2, ..., i_l} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l}\right) M\left(\sum_{0 \le j_1, j_2 \ ... j_h} b_{j_1, j_2, ... j_h} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h}\right) =$$

$$= \sum_{0 \le i_1, i_2, ..., i_l \le n} a_{i_1, i_2, ..., i_l} \sum_{0 \le j_1, j_2, ... j_h \le n} b_{j_1, j_2, ..., j_h} M \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h} -$$

$$- \sum_{0 \le i_1, i_2, ..., i_l \le n} a_{i_1, i_2, ..., i_l} \sum_{0 \le j_1, j_2, ... j_h \le n} b_{j_1, j_2, ..., j_h} M \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l} M \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h} . \tag{2}$$

Далее, учитывая что $\zeta_j = \eta^j \xi_j, \ j = 0,1,...,n$ и независимость с.в. η и ξ_j, мы имеем

$$M \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h} - M \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} ... \zeta_{i_l} M \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} ... \zeta_{j_h} =$$
$$= M\left(\eta^{i_1 + i_2 + ... + i_l + J_1 + j_2 + ... + j_h} \xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_l} \xi_{j_1} \xi_{j_2} ... \xi_{j_h}\right) -$$

$$-M\left(\eta^{i_1 + i_2 + ... + i_l} \xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_l}\right) M\left(\eta^{j_1 + j_2 + ... + j_h} \xi_{j_1} \xi_{j_2} ... \xi_{j_h}\right) =$$

$$= M\left(\eta^{i_1 + i_2 + ... + i_l + j_1 + J_2 + ... + J_h}\right) M\left(\xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_l} \xi_{j_1} \xi_{j_2} ... \xi_{j_h}\right) -$$

$$-M\left(\eta^{i + I_2 + ... + i_l}\right) M\left(\eta^{j_1 + j_2 + ... + j_h}\right) M\left(\xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_l}\right) M\left(\xi_{j_1} \xi_{j_2} ... \xi_{j_h}\right).$$

Теперь положим $i = i_1 + i_2 + ... + i_l, \ j = j_1 + j_2 + ... + j_h$ и покажем справедливость неравенства

$$\operatorname{cov}(\eta^i, \eta^j) = M\eta^{i+j} - M\eta^i M\eta^j \ge 0 \tag{3}$$

Неравенства (3) следует из общеизвестного неравенства Ляпунова:

$$M\eta^i M\eta^j \le \left(M\eta^{i+j}\right)^{\frac{i}{i+j}} \left(M\eta^{i+j}\right)^{\frac{j}{i+j}} = M\eta^{i+j} < \infty.$$

Заметим, что при доказательстве неравенства (3) мы учли, что все моменты с.в η неотрицательные, существует конечный момент $2k-$того порядка и $i+j\le 2k.$

Из соотношения (2), согласно (3), учитывая не отрицательность моментов с.в. η и коэффициентов рассматриваемых полиномов, имеем

$$cov\left(P_l(\zeta),P_h(\zeta)\right)=\sum_{0\le i_1,i_2,\dots,i_l\le n}a_{i_1,i_2,\dots,i_l}\sum_{0\le j_1,j_2,\dots j_h\le n}b_{j_1,j_2,\dots,j_h}\left(M\eta^{i+j}\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h}-\right.$$

$$\left.-M(\eta^i\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l})M(\eta^j\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h})\right)=\sum_{0\le i_1,i_2,\dots,i_l\le n}a_{i_1,i_2,\dots,i_l}\sum_{0\le j_1,j_2,\dots j_h\le n}b_{j_1,j_2,\dots,j_h}\times$$

$$\times\left(M\eta^{i+j}M(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}\xi_{j_1}\dots\xi_{j_h})-M\eta^iM(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l})M\eta^jM(\xi_{j_1}\dots\xi_{j_h})\right)\ge$$

$$\ge\sum_{0\le i_1,\dots,i_l,j_1,\dots j_h\le n}a_{i_1,\dots,i_l}b_{j_1,\dots,j_h}M\eta^iM\eta^j\left(M\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}\xi_{j_1}\dots\xi_{j_h}-M\xi_{i_1}\dots\xi_{i_l}M\xi_{j_1}\dots\xi_{j_h}\right)\ge$$

$$\ge M\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h}\right)-M\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l}\right)M\left(\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h}\right).$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 1, достаточно показать справедливость неравенства

$$M\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h}\right)\ge M\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_l}\right)M\left(\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_h}\right). \qquad (4)$$

Положим $A=\{i_1,i_2,\dots,i_l\}$, $B=\{j_1,j_2,\dots,j_h\}$ и $C=\{i_1,i_2,\dots,i_l,j_1,j_2,\dots,j\}$. Пусть множество A содержит p_0 нулей p_1 единиц, …, p_n штук числа n. Аналогично множество B состоит из $q_i,i=0,1,\dots,n$ штук числа i. Тогда в C количество чисел $i,i=0,1,\dots,n$, будет p_i+q_i, при этом выполняется равенства $p_1+p_2+\dots+p_n=l$; $q_1+q_2+\dots+q_n=h$. Используя эти обозначения и замечания. Мы можем переписать неравенство (4) в виде

$$M\left(\xi_0^{p_0+q_0}\xi_1^{p_1+q_1}\dots\xi_n^{p_n+q_n}\right)\ge M\left(\xi_0^{p_0}\xi_1^{p_1}\dots\xi_n^{p_n}\right)M\left(\xi_0^{q_0}\xi_1^{q_1}\dots\xi_n^{q_n}\right) \qquad (5)$$

Отсюда, используя условию независимости с.в. $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n$, имеем, что неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\prod_{i=0}^{n}M\xi_i^{p_i}M\xi_i^{q_i}\le\prod_{i=1}^{n}M\xi_i^{p_i+q_i}$$

Справедливость последнего непосредственно следует из неравенства Ляпунова:

$$\prod_{i=0}^{n} M\xi_i^{p_i} M\xi_i^{q_i} \le \prod_{i=0}^{n} \left(M\xi_i^{p_i+q_i}\right)^{\frac{p_i}{p_i+q_i}} \left(M\xi_i^{p_i+q_i}\right)^{\frac{q_i}{p_i+q_i}} = \prod_{i=1}^{n} M\xi_i^{p_i+q_i}$$

Теорема доказана.

1. H.U.Gerbber, The discounted central limit theorem and its Berry-Essen analogue, Ann. Math. Statist. 45, 1, 1971, 389 – 392.
2. С.Х.Сираждинов, М.У.Гафуров, Замечание к одной предельной теореме, В сб.»Случайные процессы и статистические выводы», вып.3,, Изд-во. «Фан» УзССР, 1973, 170 – 172.
3. Т.А.Азларов, Б.Мередов, Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю, Изв. АН УзССР, сер. физ. – мат. наук, №5, 1977, 7 – 15.
4. Б.Мередов, Теорема Линдеберга-Феллера для одной схеме суммирования независимых случайных величин, Изв.АН ТССР, сер. ФТХ и ГН, №4,1977, 12 – 18.
5. Ш.Шорахмедов, Об одном обобщение ассоцированности, Тезисы докладов научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа» , Ташкент, 20-21 февраль 2021 г., 182-183.